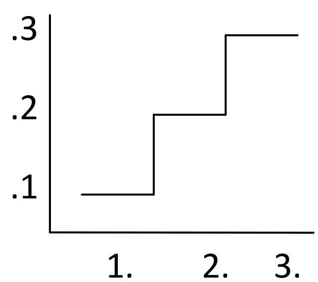
**Prof. Dr. Alfred Toth**

**Komplementäre extrinsische Semiotik**

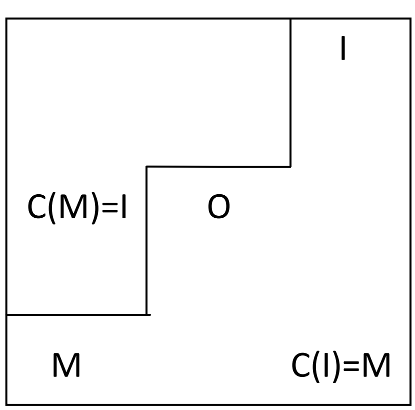
1. Im Anschluß an Bense (1979, S. 53) kann man der Peirceschen Zeichenrelation als triadischer Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation die folgende Form geben

$ZR = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow I))$,

d.h. bei der Abbildung der Partialrelationen wird jeweils die Codomäne einer n-stufigen Funktion auf die Domäne einer (n+1)-stufigen Funktion abgebildet. Dieser Vorgang kann durch das folgende Treppenmodell veranschaulicht werden




Da bei den Abbildungen die Domänenwerte der jeweils vorangehenden Stufen nicht erhalten bleiben, hatte ich die Zeichenrelation ZR als extrinsisch bezeichnet (Toth 2012). Die Zeichenfunktion unterteilt also den aus einer triadischen und einer trichotomischen Koordinate bestehenden semiotischen Raum in einen semiotischen Teilraum unterhalb des Graphs und einen ihm komplementären semiotischen Teilraum oberhalb des Graphs (vgl. dazu Bense 1979, S. 101 f.):



Damit gelten also folgende Komplementgesetze:

C(.1.) = (.3.)

C(.2.) = (.2.)

C(.3.) = (.1.),

das bedeutet aber nichts anderes, als daß der Komplementoperator C eine semiotische Gruppe erzeugt (vgl. Toth 2006, S. 39 ff.). Im folgenden gebe ich eine detaillierte Übersicht der auf den drei Komplementgesetzen konstruierbaren Komplementärsemiotik.

2.1.1. Komplementärsystem (PZ, $C_1$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_1$ 1 = 2; 1 $C_1$ 2 = 2 $C_1$ 1 = 3; 1 $C_1$ 3 = 3 $C_1$ 1 = 1; 2 $C_1$ 2 = 1; 2 $C_1$ 3 = 3 $C_1$ 2 = 2; 3 $C_1$ 3 = 3.

2. Assoziativität: 1 $C_1$ (2 $C_1$ 3) = (1 $C_1$ 2) $C_1$ 3 = 2; 2 $C_1$ (3 $C_1$ 2) = (2 $C_1$ 3) $C_1$ 2 = 1, 3 $C_1$ (3 $C_1$ 1) = (3 $C_1$ 3) $C_1$ 1 = 1, usw.

3. Einselement: 1 $C_1$ 3 = 3 $C_1$ 1 = 1; 2 $C_1$ 3 = 3 $C_1$ 2 = 2; 3 $C_1$ 3 = 3, d.h. e = 3.

4. Inverses Element: $1^{-1}$ = 2, denn 1 $C_1$ 2 = 3; $2^{-1}$ = 1, denn 2 $C_1$ 1 = 3; $3^{-1}$ = 3 = const.

Sei $\gamma_1$: 1 $\rightarrow$ 2, 2 $\rightarrow$ 1, dann erzeugt $\gamma_1$ die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$\gamma_1$ (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.2)

$\gamma_1$ (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.1)

$\gamma_1$ (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.3)

$\gamma_1$ (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.1)

$\gamma_1$ (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.3)

$\gamma_1$ (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.3 2.3)

$\gamma_1$ (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.1)

$\gamma_1$ (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.3)

$\gamma_1$ (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.3 2.3)

$\gamma_1$ (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 1.3 2.3)

2.1.2. Komplementärsystem (PZ, $C_2$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_2$ 1 = 3; 1 $C_2$ 2 = 2 $C_2$ 1 = 1; 1 $C_2$ 3 = 3 $C_2$ 1 = 2; 2 $C_2$ 2 = 2; 2 $C_2$ 3 = 3 $C_2$ 2 = 3; 3 $C_2$ 3 = 1.

2. Assoziativität: 1 $C_2$ (2 $C_2$ 3) = (1 $C_2$ 2) $C_2$ 3 = 2; 2 $C_2$ (3 $C_2$ 2) = (2 $C_2$ 3) $C_2$ 2 = 3, 3 $C_2$ (3 $C_2$ 1) = (3 $C_2$ 3) $C_2$ 1 = 3, usw.

3. Einselement: 1 $C_2$ 2 = 2 $C_2$ 1 = 1; 2 $C_2$ 2 = 2; 3 $C_2$ 2 = 2 $C_2$ 3 = 3, d.h. e = 2.

4. Inverses Element: $1^{-1}$ = 3, denn 1 $C_2$ 3 = 2; $2^{-1}$ = 2 = const., $3^{-1}$ = 1, denn 3 $C_2$ 1 = 2.

Sei $\gamma_2$: 1 $\rightarrow$ 3, 3 $\rightarrow$ 1, dann erzeugt $\gamma_2$ die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$\gamma_2$ (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.3)

$\gamma_2$ (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.2)

$\gamma_2$ (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.1)

$\gamma_2$ (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.2)

$\gamma_2$ (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.1)

$\gamma_2$ (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.1 3.1)

$\gamma_2$ (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.2)

$\gamma_2$ (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.1)

$\gamma_2$ (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.1 3.1)

$\gamma_2$ (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.1 2.1 3.1)

2.1.3. Komplementärsystem (PZ, $C_3$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_3$ 1 = 1; 1 $C_3$ 2 = 2 $C_3$ 1 = 2; 1 $C_3$ 3 = 3 $C_3$ 1 = 3; 2 $C_3$ 2 = 3; 2 $C_3$ 3 = 3 $C_3$ 2 = 1; 3 $C_3$ 3 = 2.

2. Assoziativität: 1 $C_3$ (2 $C_3$ 3) = (1 $C_3$ 2) $C_3$ 3 = 1; 2 $C_3$ (3 $C_3$ 2) = (2 $C_3$ 3) $C_3$ 2 = 2, 3 $C_3$ (3 $C_3$ 1) = (3 $C_3$ 3) $C_3$ 1 = 2, usw.

3. Einselement: 1 $C_3$ 1 = 1; 2 $C_3$ 1 = 1 $C_3$ 2 = 2; 3 $C_3$ 1 = 1 $C_3$ 3 = 3, d.h. e = 1.

4. Inverses Element: $1^{-1}$ = 1 = const., $2^{-1}$ = 3, denn 2 $C_3$ 3 = 1, $3^{-1}$ = 2, denn 3 $C_3$ 2 = 1.

Sei $\gamma_3$: 2 $\rightarrow$ 3, 3 $\rightarrow$ 2, dann erzeugt $\gamma_3$ die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$\gamma_3$ (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.1)

$\gamma_3$ (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.3)

$\gamma_3$ (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.2)

$\gamma_3$ (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.3)

$\gamma_3$ (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.2)

$\gamma_3$ (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.2 1.2)

$\gamma_3$ (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.3)

$\gamma_3$ (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.2)

$\gamma_3$ (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.2 1.2)

$\gamma_3$ (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 3.2 1.2)

Alle drei Komplementärsysteme sind offensichtlich kommutativ, d.h. sie bilden abelsche Gruppen.

## 2.2. Kommutative Quasi-Komplementärsysteme

### 2.2.1. Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_4$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_4$ 1 = 3; 1 $C_4$ 2 = 2 $C_4$ 1 = 2; 1 $C_4$ 3 = 3 $C_4$ 1 = 1; 2 $C_4$ 2 = 1; 2 $C_4$ 3 = 3 $C_4$ 2 = 3; 3 $C_4$ 3 = 2.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_4$ (2 $C_4$ 3) = 1 $\neq$ (1 $C_4$ 2) $C_4$ 3 = 3; 3 $C_4$ (3 $C_4$ 1) = 1 $\neq$ (3 $C_4$ 3) $C_4$ 1 = 2, usw.

3. Einselemente: 1 $C_4$ 3 = 3 $C_4$ 1 = 1; 2 $C_4$ 1 = 1 $C_4$ 2 = 2; 3 $C_4$ 2 = 2 $C_4$ 3 = 3.

### 2.2.2. Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_5$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_5$ 1 = 1; 1 $C_5$ 2 = 2 $C_5$ 1 = 3; 1 $C_5$ 3 = 3 $C_5$ 1 = 2; 2 $C_5$ 2 = 2; 2 $C_5$ 3 = 3 $C_5$ 2 = 1; 3 $C_5$ 3 = 3.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_5$ (2 $C_5$ 3) = 1 $\neq$ (1 $C_5$ 2) $C_5$ 3 = 3; 3 $C_5$ (3 $C_5$ 1) = 1 $\neq$ (3 $C_5$ 3) $C_5$ 1 = 2, usw.

3. Einselemente: 1 $C_5$ 1 = 1; 2 $C_5$ 2 = 2; 3 $C_5$ 3 = 3. (Weil hier jedes Element idempotent ist, ist (PZ, $C_5$) eine Steiner-Quasigruppe; vgl. Lindner und Evans 1977, S. 51 ff.).

### 2.2.3. Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_6$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_6$ 1 = 2; 1 $C_6$ 2 = 2 $C_6$ 1 = 1; 1 $C_6$ 3 = 3 $C_6$ 1 = 3; 2 $C_6$ 2 = 3; 2 $C_6$ 3 = 3 $C_6$ 2 = 2; 3 $C_6$ 3 = 1.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_6$ (2 $C_6$ 3) = 1 $\neq$ (1 $C_6$ 2) $C_6$ 3 = 3; 3 $C_6$ (3 $C_6$ 1) = 1 $\neq$ (3 $C_6$ 3) $C_6$ 1 = 2, usw.

3. Einselemente: 1 $C_6$ 2 = 2 $C_6$ 1 = 1; 2 $C_6$ 3 = 3 $C_6$ 2 = 2; 3 $C_6$ 1 = 1 $C_6$ 3 = 3.

Die drei Quasi- Quasi-Komplementärsysteme (PZ, $C_4$), (PZ, $C_5$) und (PZ, $C_6$) bilden also Loops, da sie Einselemente haben, wobei die entsprechenden Links- ($a^\lambda$) und Rechtsinversen ($a^\rho$) jeweils zusammenfallen.

2.3. Semiotische Quasi- Quasi-Komplementärsysteme mit identischer Haupt-diagonale

| $C_7$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 3 |

| $C_8$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |

| $C_9$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 |

| $C_{10}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | 2 |

| $C_{11}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 |

| $C_{12}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 |

2.3.1. Nichtkommutative Quasi-Komplementärsysteme

2.3.1.1. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_7$)

1. Abgeschlossenheit: $1\ C_7\ 1 = 3$; $1\ C_7\ 2 = 1 \neq 2\ C_7\ 1 = 2$; $1\ C_7\ 3 = 2 \neq 3\ C_7\ 1 = 1$; $2\ C_7\ 2 = 3$; $2\ C_7\ 3 = 1 \neq 3\ C_7\ 2 = 2$; $3\ C_7\ 3 = 3$.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1\ C_7\ (2\ C_7\ 3) = 3 \neq (1\ C_7\ 2)\ C_7\ 3 = 2$, usw.

3. Einselemente: $1\ C_7\ 2 = 1 \neq 2\ C_7\ 1 = 2$; $2\ C_7\ 1 = 2 \neq 1\ C_7\ 2 = 1$; $3\ C_7\ 3 = 3$.

2.3.1.2. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_8$)

1. Abgeschlossenheit: $1\ C_8\ 1 = 3$; $1\ C_8\ 2 = 2 \neq 2\ C_8\ 1 = 1$; $1\ C_8\ 3 = 1 \neq 3\ C_8\ 1 = 2$; $2\ C_8\ 2 = 3$; $2\ C_8\ 3 = 2 \neq 3\ C_8\ 2 = 1$; $3\ C_8\ 3 = 3$.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1\ C_8\ (3\ C_8\ 2) = 3 \neq (1\ C_8\ 3)\ C_8\ 2 = 2$, usw.

3. Einselemente: $1\ C_8\ 3 = 1 \neq 3\ C_8\ 1 = 2$; $2\ C_8\ 3 = 2 \neq 3\ C_8\ 2 = 1$; $3\ C_8\ 3 = 3$.

2.3.1.3. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_9$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_9$ 1 = 2; 1 $C_9$ 2 = 1 $\neq$ 2 $C_9$ 1 = 3; 1 $C_9$ 3 = 3 $\neq$ 3 $C_9$ 1 = 1; 2 $C_9$ 2 = 2; 2 $C_9$ 3 = 1 $\neq$ 3 $C_9$ 2 = 3; 3 $C_9$ 3 = 2.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_9$ (2 $C_9$ 3) = 2 $\neq$ (1 $C_9$ 2) $C_9$ 3 = 3, usw.

3. Einselemente: 1 $C_9$ 2 = 1 $\neq$ 2 $C_9$ 1 = 3; 2 $C_9$ 2 = 2; 3 $C_9$ 2 = 3 $\neq$ 2 $C_9$ 3 = 1.

2.3.1.4. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_{10}$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_{10}$ 1 = 2; 1 $C_{10}$ 2 = 3 $\neq$ 2 $C_{10}$ 1 = 1; 1 $C_{10}$ 3 = 1 $\neq$ 3 $C_{10}$ 1 = 3; 2 $C_{10}$ 2 = 2; 2 $C_{10}$ 3 = 3 $\neq$ 3 $C_{10}$ 2 = 1; 3 $C_{10}$ 3 = 2.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_{10}$ (2 $C_{10}$ 3) = 1 $\neq$ (1 $C_{10}$ 2) $C_{10}$ 3 = 2, usw.

3. Einselemente: 1 $C_{10}$ 3 = 1 $\neq$ 3 $C_{10}$ 1 = 3; 2 $C_{10}$ 2 = 2; 3 $C_{10}$ 1 = 3 $\neq$ 1 $C_{10}$ 3 = 1.

2.3.1.5. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_{11}$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_{11}$ 1 = 1; 1 $C_{11}$ 2 = 2 $\neq$ 2 $C_{11}$ 1 = 3; 1 $C_{11}$ 3 = 3 $\neq$ 3 $C_{11}$ 1 = 2; 2 $C_{11}$ 2 = 1; 2 $C_{11}$ 3 = 2 $\neq$ 3 $C_{11}$ 2 = 3; 3 $C_{11}$ 3 = 1.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 2 $C_{11}$ (1 $C_{11}$ 3) = 2 $\neq$ (2 $C_{11}$ 1) $C_{11}$ 3 = 1, usw.

3. Einselemente: 1 $C_{11}$ 1 = 1; 2 $C_{11}$ 3 = 2 $\neq$ 3 $C_{11}$ 2 = 3; 3 $C_{11}$ 2 = 3 $\neq$ 2 $C_{11}$ 3 = 2.

2.3.1.6. Nichtkommutatives Quasi-Komplementärsystem (PZ, $C_{12}$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $C_{12}$ 1 = 1; 1 $C_{12}$ 2 = 3 $\neq$ 2 $C_{12}$ 1 = 2; 1 $C_{12}$ 3 = 2 $\neq$ 3 $C_{12}$ 1 = 3; 2 $C_{12}$ 2 = 1; 2 $C_{12}$ 3 = 3 $\neq$ 3 $C_{12}$ 2 = 2; 3 $C_{12}$ 3 = 1.

2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: 1 $C_{12}$ (2 $C_{12}$ 3) = 2 $\neq$ (1 $C_{12}$ 2) $C_{12}$ 3 = 1, usw.

3. Einselemente: 1 $C_{12}$ 1 = 1; 2 $C_{12}$ 1 = 2 $\neq$ 1 $C_{12}$ 2 = 3; 3 $C_{12}$ 1 = 3 $\neq$ 1 $C_{12}$ 3 = 2.

Bei den sechs Quasi-Komplementärsystemen (PZ, $C_7$) bis (PZ, $C_{12}$) gilt also $a^\lambda \neq a^\rho$, d.h. die entsprechenden Links- und Rechtsinversen fallen nicht zusammen.

Literatur

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Lindner, Charles C./Evans, Trevor, Finite Embedding Theorems for Partial Desings and Algebras. Québec 1977

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Innen und Außen als semiotische Basis. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012

14.2.2012